

Mechanika Płynów ustrojowych i bioprzepływów

Laboratorium 3

Ruch płynu. Siła oporu. Badanie OB



Ruch cieczy

Ruch ustalony. Ruch ustalony jest to ruch, którego elementy w poszczególnych punktach przestrzeni zależą tylko od położenia tych punktów w przestrzeni i nie zmieniają się w czasie.

Ruch nieustalony. Ruch nieustalony jest to ruch, którego elementy są funkcjami zarówno położenia, jak i czasu.

Tor cząstki. Torem cząstki nazywamy linię, jaką zakreśla ta cząstka w przestrzeni.

Linia prądu. Linią prądu nazywamy linię poprowadzoną w polu prędkości w ten sposób, że styczne do niej w każdym punkcie wskazują w danej chwili kierunek wektora prędkości.

Struga. Strugą nazywamy pęk linii prądu przechodzących przez punkty nieskończenie małego poletka wyodrębnionego w przestrzeni wypełnionej poruszającym się płynem. Struga jest pojęciem fizycznym, ponieważ posiada wymiary poprzeczne, w odróżnieniu od linii prądu, która jest pojęciem geometrycznym.

Strumień. Strumieniem nazywamy zbiór strug, przechodzących przez dowolnie ograniczone pole w przestrzeni wypełnionej poruszającym się płynem.

Przekrój poprzeczny. Przekrojem poprzecznym strugi lub strumienia nazywamy powierzchnię prostopadłą (ortogonalną) do wszystkich linii prądu.

Natężenie przepływu (wydatek strumienia, przepływu). Natężeniem (objętościowym) przepływu nazywamy objętość cieczy, która przepływa przez jakiś przekrój strumienia w jednostce czasu. Pojęcia te odnoszą się również do strugi cieczy.

Prędkość. Prędkość średnia. Prędkość definiuje się jako stosunek małego przemieszczenia Δl do odpowiednio krótkiego przedziału czasowego Δt

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

lub ściślej, jako granicę do której zdąża stosunek $\frac{\Delta l}{\Delta t}$, gdy Δt zdąża do zera

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

Podane definicje dotyczą ruchu pojedynczej cząstki. Gdy rozważamy zjawisko ruchu pewnej ilości cieczy (np. ruch w rzece), której cząstki poruszają się z różnymi prędkościami, to dla scharakteryzowania w tym przypadku prędkości jedną wielkością stosowane jest pojęcie **prędkości średniej** wyznaczanej następująco:

$$v_{sr} = \frac{Q}{F},$$

gdzie Q jest natężeniem przepływu, a F polem powierzchni przekroju poprzecznego.

Pole prędkości. Polem prędkości nazywamy pole, którego każdemu punktowi odpowiada prędkość chwilowa reprezentowana przez wektor prędkości zaczepiony w tym punkcie. Jeśli

pole prędkości jest niezmiennie w czasie, to mamy do czynienia z ruchem ustalonym (stacjonarny), gdy pole ulega zmianom, to mamy do czynienia z ruchem nieustalonym (niestacjonarny).

Ruch ciągły. Ruch ciągły jest to ruch, w którym dowolnie wyodrębniony obszar przestrzeni jest całkowicie wypełniony cieczą w każdej chwili.

Ruch jednostajny. Ruch jednostajny jest to ruch, w którym wszystkie przekroje poprzeczne strumienia są jednakowe, a w odpowiadających sobie punktach przekrojów prędkości są jednakowe.

Ruch zmienny. Ruch zmienny jest to ruch, w którym nie są spełnione warunki ruchu jednostajnego.

Ruch laminarny i burzliwy.

W 1883 roku Osborne Reynolds przeprowadził eksperyment, który ilustrował istnienie dwóch rodzajów ruchu cząstek cieczy. Reynolds obserwował ruch cieczy w rurze.

Ruch, w którym cząstki cieczy poruszają się po torach równoległych do osi rury, nazywamy ruchem laminarnym lub warstwowym.

Ruch, w którym cząstki cieczy poruszają się również w kierunku nierównoległym do osi rury, nazywamy ruchem burzliwym lub turbulentnym.

Reynolds przeprowadził swe badania dla cieczy o różnych lepkościach i w rurach o różnych średnicach. Na ich podstawie stwierdził, że przejście z ruchu laminarnego do burzliwego następuje przy tej samej wartości stosunku $\frac{vd}{\nu}$. Stosunek ten nosi obecnie nazwę liczby

Reynoldsa i jest oznaczany symbolem Re

$$Re = \frac{vd}{\nu}$$

gdzie

Re - liczba Reynoldsa

v - prędkość średnia

d - średnica rury, wymiar charakterystyczny opływającego lub poruszającego się obiektu

ν - kinematyczny współczynnik lepkości [m^2/s]

Liczbę Reynoldsa można zdefiniować także jako

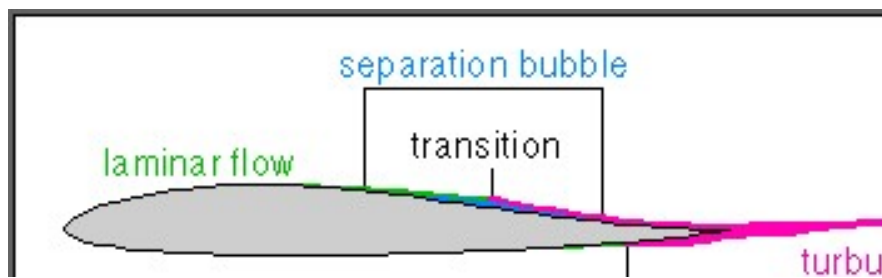
$$Re = \frac{\rho vd}{\mu},$$

gdzie

ρ - gęstość płynu

μ - dynamiczny współczynnik lepkości [$Pa \cdot s$]

Na podstawie wielu badań stwierdzono, że przejście z ruchu laminarnego do burzliwego następuje przy liczbie Reynoldsa $Re \approx 2300$. Poniżej tej wartości liczby Reynoldsa przepływ jest laminarny, natomiast powyżej przepływ jest burzliwy (turbulentny).



Siła oporu

Siła oporu występuje podczas ruchu płynu i działa na obiekt opływany lub na obiekt poruszający się w płynie (płyn może być nieruchomy lub być w ruchu).

Siła oporu to siła, która utrudnia poruszanie się ciał w płynach.

<https://www.youtube.com/watch?v=GMmNKUIXXDs>

Siła oporu określona jest wzorem:

dla przepływu laminarnego

$$F_D = 3\pi\mu u d$$

dla przepływu turbulentnego

$$F_D = c_D \rho \frac{u^2}{2} A$$

gdzie

F_D - siła oporu [N]

μ - dynamiczny współczynnik lepkości [Pa·s]

d – wymiar charakterystyczny opływanego obiektu [m]

ρ - gęstość płynu [kg/m³]

u - prędkość względna obiektu względem płynu; jeżeli płyn opływa obiekt i obiekt jest nieruchomy to u jest prędkością płynu; jeżeli płyn jest nieruchomy, a porusza się obiekt to u jest prędkością poruszania się obiektu; jeżeli obiekt porusza się w płynie będącym w ruchu, to u jest różnicą prędkości obiektu i przepływu.

A - pole maksymalnego przekroju poprzecznego [m²], na który napotyka struga płynu

c_D - współczynnik oporu (wielkość niemianowana).

Ogólnie mówiąc, siła oporu zależy od prędkości względnej obiektu względem płynu.

Pole maksymalnego przekroju poprzecznego określa się na podstawie geometrii obiektu opływanego.

Jeżeli opływana jest kula o średnicy d , to maksymalnym przekrojem poprzecznym jest koło o średnicy d .

Jeżeli opływany jest walec o średnicy d i wysokości h to maksymalny przekrój poprzeczny jest:

- kołem o średnicy d jeśli przepływ odbywa się wzdłuż osi walca;
- prostokątem o wymiarach $d \times h$ jeśli przepływ odbywa się w kierunku prostopadłym do osi walca.

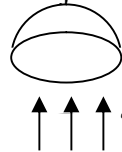
Współczynnik oporu c_D jest parametrem zależnym, przede wszystkim, od geometrii (kształtu) opływającego obiektu.

Dla wielu kształtów wartości współczynnika są znane i można je znaleźć w literaturze.

Np. dla czaszy $c_D = 1.2$ gdy przepływ następuje

prostopadle do podstawy czaszy,

od podstawy czaszy do jej wierzchołka.

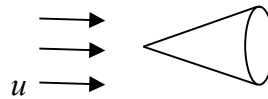


dla stożka c_D zależy od kąta rozwarcia wierzchołka,

np. $c_D = 0.5$ dla kąta 60° gdy przepływ następuje

prostopadle do podstawy stożka,

od wierzchołka do podstawy stożka



Dla kuli i walca opracowano bardziej szczegółowe wzory na współczynnik oporu, wyznaczono zależność współczynnika oporu od liczby Reynoldsa. Uwzględnia się tym samym wpływ prędkości, lepkości płynu, wymiar charakterystycznego obiektu i gęstość płynu na współczynnik oporu.

$$\text{Dla kuli: } c_D = \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0.4$$

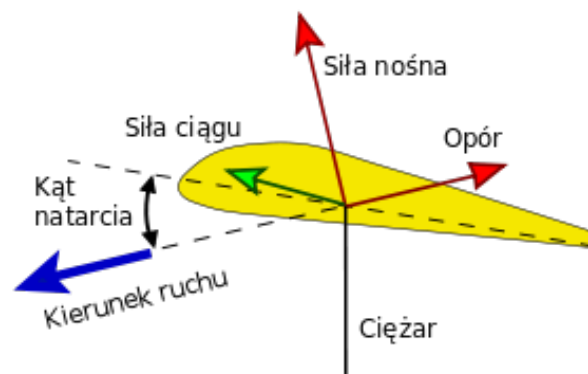
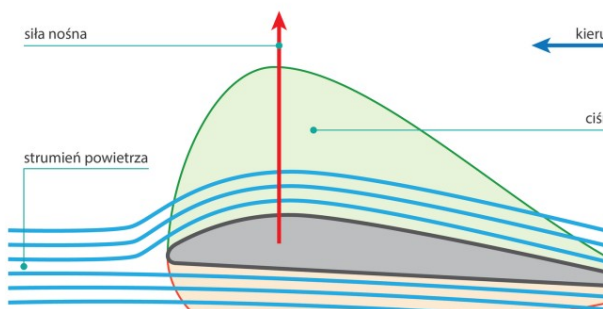
gdzie Re jest liczbą Reynoldsa.

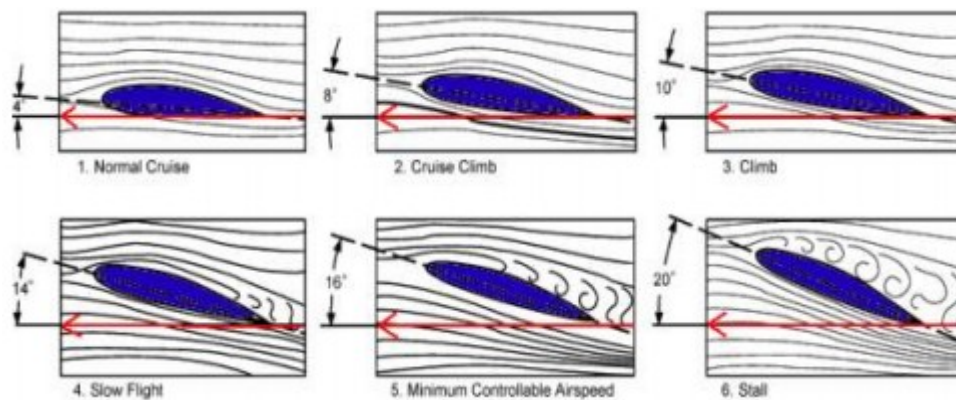
Dla walca:

$$\text{jeżeli } Re > 2 \cdot 10^5 \text{ to } c_D = 1 + \frac{10}{Re^{0.67}}$$

Siła nośna

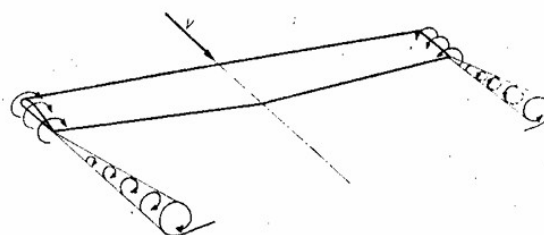
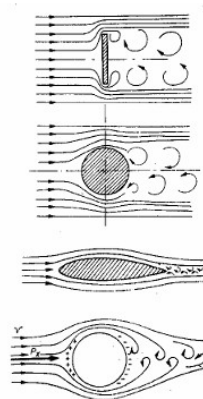
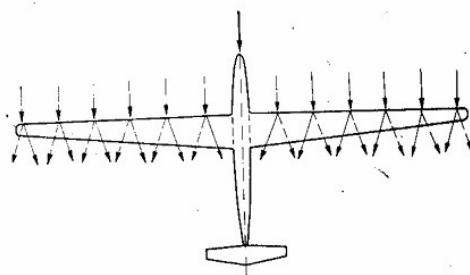
Ponieważ siła nośna jest składową siły aerodynamicznej, której drugą składową jest opór, obie te siły są nierozdzielnie związane ze sobą. Przy czym o ile siła nośna może być zerowa, o tyle opór zawsze występuje, o ile tylko ciało znajduje się w ruchu. Wzór na siłę oporu jest identyczny, jedynie współczynnik C_z , zastępuje się współczynnikiem C_D .





Opór kształtu

Opór indukowany – wynika ze skończonej rozpiętości płata nośnego i dążenia do wyrównania ciśnienia na jego końcach.



zad. 1. Samochód posiada pionową antenę o wysokości $h = 0.914$ m i średnicy $d = 0.003$ m. Samochód porusza się z prędkością $u = 120$ km/h w powietrzu o gęstości $\rho_p = 1.2$ kg/m³ i dynamicznym współczynniku lepkości $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5}$ Pa·s. Ile mocy samochód musi zużyć na pokonanie oporu anteny?

dane:

$h = 0.9$ m

$d = 0.003$ m

$$u = 120 \text{ km/h} = 120 \cdot 1000 / 3600 \text{ m/s} = 33.333 \text{ m/s}$$

$$\rho_p = 1.2 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

Wyznaczenie liczby Reynoldsa

$$\text{Re} = \frac{\rho u d}{\mu} = \frac{1.2 \cdot 33.333 \cdot 0.003}{1.8 \cdot 10^{-5}} = 6833.27$$

$\text{Re} > 2300$, to jest to przepływ turbulentny

Współczynnik oporu anteny, która jest walcem:

$$c_D = 1 + \frac{10}{\text{Re}^{0.67}} = 1 + \frac{10}{6833.27^{0.67}} = 1.02696$$

Wszystkie wielkości można podstawić do wzoru na siłę oporu w przypadku przepływu turbulentnego

$$F_D = c_D \rho \frac{u^2}{2} A = c_D \rho \frac{u^2}{2} h d = 1.02696 \cdot 1.23 \cdot \frac{33.333^2}{2} \cdot 0.003 \cdot 0.9 = 1.8947 \text{ [N]}$$

Moc wyznacza się ze wzoru:

$$P = u F_D = 33.333 \cdot 1.8947 = 63.156 \text{ [W]}$$

zad. 2.

Kulka stalowa wykonana z materiału o gęstości $\rho_s = 7800 \text{ kg/m}^3$ i średnicy $d = 5 \text{ mm}$ opada w wodzie ze stałą prędkością. Dynamiczny współczynnik lepkości wody przyjąć $\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, gęstość wody $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$. Określić prędkość opadania kulki.

dane:

$$\rho_s = 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$d = 5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Siły działające na kulkę:

- siły wyporu (Archimidesa)

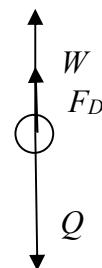
$$W = V \rho_w g$$

gdzie V jest objętością kulki, g – przyspieszeniem ziemskim

- siła ciężkości:

$$Q = V \rho_s g$$

- siła oporu F_D .



Równowaga sił:

$$F_D + W = Q$$

Z treści zadania nie wynika informacja o tym, czy przepływ jest laminarny czy turbulentny.

Spróbujmy rozwiązać zadanie tak jakby ruch był laminarny. Wtedy siła oporu określona jest wzorem:

$$F_D = 3\pi\mu u d$$

Wstawiając wzory na siły dorównania równowagi otrzymuje się:

$$3\pi\mu u d + V\rho_w g = V\rho_s g$$

Wstawiając do powyższego wzoru objętość kuli otrzymuje się:

$$3\pi\mu u d + \frac{\pi}{6}d^3\rho_w g = \frac{\pi}{6}d^3\rho_s g.$$

Z powyższego wzoru wyznacza się prędkość:

$$u = \frac{d^2 g}{18\mu}(\rho_s - \rho_w) = \frac{25 \cdot 10^{-6} \cdot 9.81}{18 \cdot 10^{-3}}(7800 - 1000) = 92.65 \text{ [m/s]}$$

Należy sprawdzić, czy przepływ jest laminarny (tak jak założyliśmy). Oblicza się liczbę Reynoldsa:

$$Re = \frac{\rho u d}{\mu} = \frac{1000 \cdot 33.354 \cdot 0.005}{10^{-3}} = 463250$$

Okazuje się, że liczba Reynoldsa jest większa od 2300, czyli przepływ może być turbulentny. Należy zatem powtórzyć obliczenia stosując wzór siły oporu dla przepływu turbulentnego:

$$F_D = c_D \rho_w \frac{u^2}{2} A.$$

Równanie równowagi sił ma postać:

$$c_D \rho_w \frac{u^2}{2} \frac{\pi}{4} d^2 + \frac{\pi}{6} d^3 \rho_w g = \frac{\pi}{6} d^3 \rho_s g$$

W powyższym wzorze wystąpił współczynnik oporu dla kuli: $c_D(Re) = \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0.4$,

który jest zależny od liczby Reynoldsa, a ta z kolei od prędkości, czyli wielkości nieznanej. Równanie równowagi sił przekształca się do postaci:

$$c_D(Re)u^2 = \frac{4dg}{3} \frac{(\rho_s - \rho_w)}{\rho_w}$$

Wartość liczbową prawej strony powyższego równania można wyznaczyć i ostatecznie mamy:

$$c_D(Re)u^2 = 0.44472$$

Aby rozwiązać to równanie należy posłużyć się techniką iteracyjną:

$$u^{(i)} = \sqrt{\frac{0.44472}{c_D(Re(u^{(i-1)}))}}, \text{ gdzie } i \text{ jest numerem iteracji.}$$

Przykładowe obliczenia do rozwiązania zadania zostaną zrealizowane w Excelu.

Przygotowane są dane (rys. 1):

B7		fx		=4*B4*B5*(B	
	A	B	C	D	
1	ro_s	7800			
2	ro_w	1000			
3	mi	0.001			
4	d	0.005			
5	g	9.81			

Rys. 1. Dane do zadania 2

Można przyjąć przybliżenie początkowe liczby $c_D^{(0)}(Re) = 1.0$

Aby zorganizować proces iteracyjny, należy zdefiniować kolejne kolumny (rys. 2). Proces iteracyjny zaczyna się od wiersza 9. W kolumnie A zawarte są numery iteracji. Kolumna B zawiera wartości prędkości. W kolumnie C będzie liczona pomocnicza wartość – liczba Reynoldsa. Kolumna D zawiera wartości współczynnika oporu. W komórkę D10 wpisano początkowe przybliżenie wartości tego współczynnika.

Pierwszą iterację policzono w wierszu 11. W komórce B11 wyznaczono prędkość korzystając z przybliżenia współczynnika oporu z komórki D10 oraz wartości 0.266832. To odwołanie nie może się zmieniać, więc przy indeksach komórki zawierającej tę wartość umieszczono znak \$.

	A	B	C	D
1	ro_s	7800		
2	ro_w	1000		
3	mi	0.001		
4	d	0.005		
5	g	9.81		
6				
7	cd_u2	4.447200E-01		
8				

Rys. 2. Proces iteracyjny do zad. 2 – obliczenie prędkości

Następnie, w kolumnie C zdefiniowano obliczenia liczby Reynoldsa korzystając z prędkości (komórka b11) oraz wartości gęstości wody, dynamicznego współczynnika lepkości wody i średnicy kulki (rys.3). Te trzy ostatnie wartości są stałe, nie zmieniają się w trakcie procesu iteracyjnego, dlatego należało unieruchomić zmianę indeksów wierszy i kolumn przy odwołaniu do tych wartości (w późniejszym etapie wiersz 11 będzie skopiowany jako kolejne iteracje).

C11				
fx = \$B\$2*\$B11*				
	A	B	C	D
1	ro_s	7800		
2	ro_w	1000		
3	mi	0.001		
4	d	0.005		
5	g	9.81		
6				
7	cd_u2	4.447200E-01		
8				
9	pr iteracji		Do	cd

Rys. 3. Proces iteracyjny do zad. 2 – obliczenie liczby Reynoldsa

Kolumnę D zdefiniowano jako współczynnik oporu dla kulki, który zależy od liczby Reynoldsa (rys. 4)

D11					
fx = =24/C11+6/(1+PIERWIAS					
	A	B	C	D	E
1	ro_s	7800			
2	ro_w	1000			
3	mi	0.001			
4	d	0.005			
5	g	9.81			
6					
7	cd_u2	4.447200E-01			
8					
9					

Rys. 4. Proces iteracyjny do zad. 2 – obliczenie współczynnika oporu

Zdefiniowano jeszcze kolumnę E „Relative error” w celu sprawdzenia warunku zakończenia procesu iteracyjnego (rys. 5). Będziemy oczekiwali, aby wartości w tej kolumnie malały i przy wartości małej (np. 10^{-5}) zakończony zostanie proces iteracyjny).

E11					
	A	B	C	D	E
1	ro_s	7800			
2	ro_w	1000			
3	mi	0.001			
4	d	0.005			
5	g	9.81			
6					
7	cd_u2	4.447200E-01			
8					
9	nr iteracji	v	Re	cd	relative

Rys. 5. Proces iteracyjny do zad. 2 – obliczenie błędu względnego

Pierwsza iteracja $i = 1$

$$u^{(1)} = 0.666873301 \text{ m/s}$$

$$\text{Re}^{(1)} = 3334.367$$

$$c_D^{(1)} = 0.509336$$

W celu policzenia kolejnych iteracji należy skopiować wiersz 11 poniżej. Operację tę należy powtórzyć kilkakrotnie, aż do uzyskania w kolumnie E wartości mniejszej od 10^{-5} . Ostatecznie otrzymano skoroszyt przedstawiony na rys. 6.

G10					
	A	B	C	D	
1	ro_s	7800			
2	ro_w	1000			
3	mi	0.001			
4	d	0.005			
5	g	9.81			
6					
7	cd_u2	4.447200E-01			
8					
9	nr iteracji	v	Re	cd	relat
10	0			1	
11	1	0.666873301	3334.367	0.509336	0.9
12	2	0.934417075	1672.00	0.101651	0

Rys. 5. Proces iteracyjny do zad. 2 – ostateczne rozwiązanie

Za rys. 5 zaznaczono (czerwona elipsa) wartość błędu względnego, która wskazuje na zakończenie procesu iteracyjnego.

Elipsa żółta wskazuje na końcowe rozwiązanie zadania, czyli prędkość opadania kulki:

$u = 0.951927804 \text{ m/s}$.

Badanie Odczyn Biernackiego (OB)

Krew to płyn ustrojowy, płynna tkanka łączna krążąca w naczyniach krwionośnych lub w jamie ciała. Układ krążenia dorosłego człowieka zawiera około 70-80 ml krwi na kilogram masy ciała (około 5000-6000 ml).

W skład krwi wchodzi składniki morfotyczne (komórkowe) (około 44 %) i osocze (około 55 %). Inne składniki krwi to hormony, rozpuszczone gazy i substancje odżywcze.

Z fizykochemicznego punktu widzenia kres jest zawiesiną, czyli mieszaniną cieczy i ciał stałych (elementy komórkowe), i zachowuje się jak płyn nienewtonowski. We krwi mężczyzny komórki stanowią od 44 do 46 %, u kobiet od 41 do 43 % objętości krwi. Wskaźnik zawartości procentowej składników stałych we krwi nazywa się hematokrytem (omawiany na poprzednich zajęciach).

Komórki krwi dzieli się na:

- erytrocyty (krwinki czerwone);
- leukocyty (białe krwinki);
- trombocyty (płytki krwi).

Szczegóły dotyczące składu krwi przedstawione zostały na wykładzie.

Zjawisko sedymentacji to opadanie cząstek stałych mieszaninie płynu i cząstek stałych. Wykorzystane to zjawisko jest przy sedymentacji wina, w odstojnikach w oczyszczalniach ścieków itp.

Zjawisko sedymentacji krwi obserwował po raz pierwszy i opisał w XIX wieku Edmund Biernacki.

Edmund Biernacki urodził się w 1866 roku w Opocznie, zmarł w 1911 r we Lwowie. Prace dotyczące badań nad sedymentacją krwi prowadził w latach 1883-1897.

Krew pozostawiona w szklanej probówce pod wpływem siły grawitacji rozdziela się na dwie frakcje. Górną warstwę naczynia zajmuje osocze krwi, a dolną – czerwone krwinki. Prędkość opadania stałych elementów krwi pozostawionej w probówce na jedną godzinę stała się jednym z podstawowych, powszechnie wykonywanych testów klinicznych krwi.

Odczyn Biernackiego (OB) wskazuje na występowanie wielu chorób mających charakter zakażeń, ale nie tylko. Zmiany Właściwości biofizycznych i chemicznych krwi są w ogólności odzwierciedleniem zmian fizjologicznych, jakie zaszły w ciele osoby, od której pobrano krew. W zależności od charakteru zmian następuje **przyspieszenie** (stany zapalne – miejscowe lub uogólnione, nowotwory. choroby rozrostowe krwi, np. białaczka, anemia sierpowata, choroby autoimmunologiczne, martwica tkanek) lub **spowolnienie** (cukrzyca – hiperglikemia, leukocytoza, nadkrwistość) opadania czerwonych krwinek. W praktyce klinicznej znaczenie ma głównie przyspieszone opadanie czerwonych krwinek.

Z procesem sedymentacji krwi jest związany proces agregacji, czyli łączenia pojedynczych krwinek w większe grupy. W zależności od stopnia zaawansowania rozróżnia się agregaty jednowymiarowe (rulony: początkowa faza agregacji) i/lub sieć agregatów trójwymiarowych. Procesy te są szczególnie ważne dla sieci drobnych naczyń krwionośnych, gdzie konieczne jest zachowanie stałej równowagi pomiędzy tendencją do agregowania krwinek a

deagregującymi właściwościami napięcia ścinania. Od tej kruchej równowagi zależy sprawne rozprowadzanie substancji odżywczych i gazów przez krew.

Prawidłowe wartości prędkości opadania czerwonych krwinek:

- noworodki: 0-2 mm/h
- niemowlęta do 6-go miesiąca życia: 12-17 mm/h
- kobiety: do lat 60: poniżej 12 mm/h
powyżej 60 lat: poniżej 20 mm/h
- mężczyźni: do 60 lat: poniżej 8 mm/h
powyżej 60 lat: poniżej 15 mm/h.

Na skutek zjawiska agregacji krwinki czerwone opadają z różną prędkością w czasie sedymentacji. W obrębie sedymentującej krwi wyróżnia się trzy zasadnicze warstwy: na górze warstwę osocza, leżącą pod nią warstwę sedymentujących agregatów oraz powstającą z czasem, zalegającą na niej warstwę depozytu (rys. 7). Śledząc w czasie aminy granicy pomiędzy osocze ma warstwą sedymentujących cząstek, a z czasem osiadłych agregatów, wyznacza się krzywą sedymentacji.

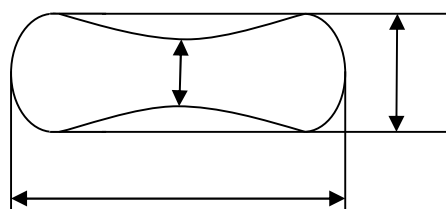
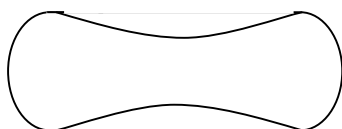


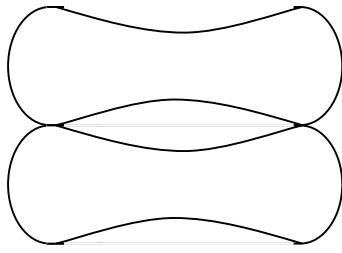
Rys. 7. Próbkki krwi: prawa – przed sedymentacją, lewa – po sedymentacji.

Przebieg sedymentacji czerwonych krwinek w osoczu zależy od wielu czynników, takich jak hematokryt globalny próbki krwi, stopień utlenienia krwi, temperatura, płeć i wiek dawcy, skład osocza krwi, ze szczególnym uwzględnieniem koncentracji białek odpowiadających za zdolność do agregacji, właściwości biofizyczne krwinek (odkształcalność, zawartość hemoglobiny).

zad. 3.

Wyznaczyć prędkość opadania agregatu krwinek czerwonych w próbce krwi. Przyjąć, że agregat składa się $n = 4$ krwinek. Gęstość krwinki przyjąć $\rho_K = 1101 \text{ kg/m}^3$ (jest to gęstość krwinki, NIE krwi). Założyć, że krwinki opadają „na płasko” jak pokazuje rys. 8a. Wymiary krwinki podane są na rys. 8b. Gęstość osocza przyjąć $\rho_O = 1031 \text{ kg/m}^3$. Badanie wykonać dla krwi, której hematokryt wynosi 45%.





rys. 8a

$$h=1\mu\text{m}$$

$$H=2.4\mu\text{m}$$

$$D=8.5\mu\text{m}$$

rys. 8b.

Dane:

$$D=8.5\mu\text{m}$$

$$H=2.4\mu\text{m}$$

$$\rho_K = 1101 \text{ kg/m}^3$$

$$n = 4$$

$$\rho_O = 1031 \text{ kg/m}^3$$

$$\varphi = 45\%$$

W zadaniu należy obliczyć lepkość płynu, w którym odbywa się sedymentacja. Ten płyn to krew z hematokrytem $\varphi = 45\%$. Należy, więc, wyznaczyć lepkość zastępczą w zależności od hematokrytu. Jest to zadanie, które rozwiązywane było na poprzednich zajęciach. Można wykorzystać przygotowany wtedy plik z rozwiązywaniem tego zagadnienia. Wpisać należy hematokryt $\varphi = 45\%$ i lepkość osocza $\mu_O = 1.4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

Otrzymana lepkość krwi to $\mu_Z = 2.38 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

Rozważać będą siły jak w zadaniu 2:

- siły wyporu (Archimidesa)

$$W = nV_K \rho_O g$$

gdzie V_K jest objętością krwinki, g – przyspieszeniem ziemskim

- siła ciężkości:

$$Q = nV_K \rho_K g$$

- siła oporu F_D

$$F_D = c_D \rho_O \frac{u^2}{2} \frac{\pi D^2}{4},$$

gdzie $c_D = c_D(\text{Re}(u))$ zależy od liczby Reynoldsa, a dalej od prędkości i jest równe $c_D = \frac{a}{\text{Re}}$ oraz

- $a = 14$ w przypadku opadania w pozycji poziomej krwinki

- $a = 8$ w przypadku opadania w pozycji pionowej krwinki.

Dla uproszczenia obliczeń i wyznaczenia objętości pojedynczej krwinki przyjmuje się, że krwinki mają kształt walca o średnicy D i wysokości H , czyli $V_K = H \frac{\pi D^2}{4}$.

Wykorzystując równanie równowagi sił:

$$F_D + W = Q$$

oraz podane powyżej wzory na siły otrzymuje się równanie:

$$u = \sqrt{\frac{2ngH(\rho_K - \rho_O)}{\rho_O c_D (\text{Re}(u))}}$$

Korzystając z danych w zadaniu powyższe równanie można zapisać w postaci iteracyjnej:

$$u^{(i)} = \sqrt{\frac{2ngH(\rho_K - \rho_O)}{\rho_O c_D (\text{Re}(u^{(i-1)}))}}.$$

Można przyjąć przybliżenie początkowe $c_D^{(0)} = 1.0$ i przeprowadzić procedurę iteracyjną (analogicznie jak w zad. 2). Zeskanowany skoroszyt z wpisanymi danymi oraz przygotowaniem procesu iteracyjnego przedstawiono na rys. 9.

B8			f_x	=2*B7*B6*B5*
	A	B	C	
3	mi	0.00238		
4	d	0.0000085		
5	g	9.81		
6	h	0.0000024		
7	n	4		

Rys. 9. Dane i parametr pomocniczy w zadaniu 3.

Korekty należy także dokonać w definicji współczynnika oporu (rys. 10)

D12			f_x	=14/C12
	A	B	C	D
3	mi	0.00238		
4	d	0.0000085		
5	g	9.81		
6	h	0.0000024		
7	n	4		
8	cd_u2	1.278821E-05		
9				
10	nr iteracji	v [m/s]	Re	cd

Rys. 10. Definicja współczynnika oporu

Zeskanowany skoroszyt z rozwiązaniem zadania przedstawiono na rys. 11.

B34		=B32*			
	A	B	C	D	E
1	ro_k	1101			
2	ro_o	1031			
3	mi	0.00238			
4	d	0.0000085			
5	q	9.81			
6	h	0.0000024			
7	n	4			
8	cd_u2	1.278821E-05			
9					
10	nr iteracji	v [m/s]	Re	cd	relative error
11	0			1	
12	1	0.00357606	1.31676E-02	1063.218675	0.99905946
13	2	0.00010967	4.03826E-04	34668.40764	0.969331771
14	3	1.9206E-05	7.07194E-05	197965.5148	0.824876531
15	4	8.0373E-06	2.95945E-05	473061.2425	0.581522439
16	5	5.1993E-06	1.91446E-05	731275.9326	0.353101584
17	6	4.1818E-06	1.53980E-05	909207.9752	0.195700046
18	7	3.7504E-06	1.38094E-05	1013804.5	0.103172283
19	8	3.5516E-06	1.30776E-05	1070532.123	0.052990118
20	9	3.4562E-06	1.27264E-05	1100075.388	0.026855672
21	10	3.4095E-06	1.25543E-05	1115151.365	0.013519221
22	11	3.3864E-06	1.24692E-05	1122766.656	0.006782612
23	12	3.3749E-06	1.24268E-05	1126593.781	0.003397076
24	13	3.3692E-06	1.24057E-05	1128512.233	0.001699983
25	14	3.3663E-06	1.23952E-05	1129472.684	0.000850353
26	15	3.3649E-06	1.23899E-05	1129953.215	0.000425267
27	16	3.3641E-06	1.23873E-05	1130193.558	0.000212656

Rys. 11. Rozwiązanie zadania 3

Wyznaczona prędkość opadania krwinek to $u = 3.36345 \cdot 10^{-6}$ m/s. W medycynie stosuje się jednostkę mm/h. Aby oszacować wynik (czy jest w granicach normy dla osoby badanej), należy przeliczyć otrzymany wynik na jednostkę mm/h. Rezultat ten jest przedstawiony w komórce B34: $u = 12.1084233$ mm/h. W większości grup badanych jest to wynik mieszczący się w normie (poza grupą mężczyzn do 60 roku życia).

Zadania do samodzielnego rozwiązania (zadania są analogiczne do tych rozwiązanych powyżej). W poniższych zadaniach pojawiają się parametry c_1 , c_2 , c_3 . Są to cyfry za numeru albumu studentki/studenta. c_1 jest ostatnią cyfrą w numerze albumu, c_2 przedostatnią, c_3 – trzecią od końca cyfrą.

Zadanie 1s. Człowiek o masie $m = (70+c_1/10)$ kg spada n spadochronie czasowym w powietrzu o temperaturze $t = 5^\circ\text{C}$ przy ciśnieniu atmosferycznym $p_a = 740$ mmHg. Obliczyć jaką musi być średnica spadochronu, jeśli dopuszczalna prędkość opadania nie powinna przekroczyć $(0.96+c_2/1000)$ m/s. Współczynnik oporu dla spadochronu wynosi 1.2. Ciężaru spadochronu nie uwzględniać.

Podpowiedź. Uwzględnić siły: ciężkości i oporu ruchu.

Gęstość powietrza wyznacza się z równania gazu doskonałego: $p = \rho \cdot R \cdot T$,

gdzie

p – ciśnienie gazu [Pa], należy przeliczyć ciśnienie podane w zadaniu z mmHg na Pa:

$$p = \rho_{Hg} \cdot g \cdot p_a$$

$$\rho_{Hg} = 13600 \text{ kg/m}^3 - \text{gęstość rtęci}$$

$$p_a = 740 \text{ mmHg} = 0.74 \text{ mHg}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2,$$

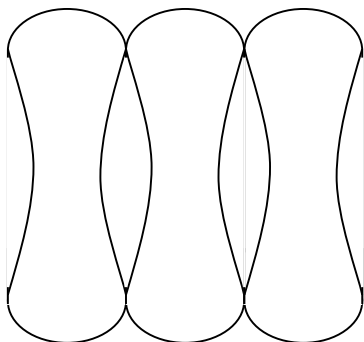
$$\text{czyli } p = \rho_{Hg} \cdot g \cdot p_a = 98\,727.84 \text{ [Pa]}$$

R – indywidualna stała gazowa, dla powietrza $R = 286.9 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$

T – temperatura podana w stopniach Kelvina [K], $t = 273+t = 273+5=278 \text{ [K]}$

$$p = \rho \cdot R \cdot T \Rightarrow \rho = \frac{p}{RT} = 1.237839 \text{ kg/m}^3.$$

Zadanie 2s. Wyznaczyć prędkość opadania agregatu krwinek czerwonych w próbce krwi. Przyjąć, że agregat składa się $n = 5+c_2$ krwinek. Gęstość krwinki przyjąć $\rho_K = 1090+c_1$ kg/m³ (jest to gęstość krwinki, NIE krwi). Założyć, że krwinki opadają w pozycji pionowej jak pokazuje rys. 12. Wymiary krwinki przyjąć jak w zadaniu 3. Gęstość osocza przyjąć $\rho_O = 1020+c_3$ kg/m³. Badanie wykonać dla krwi, której hematokryt wynosi $(44+c_1/10)\%$.



Rys. 12. Pozycja agregatu krwinek podczas opadania